デファイナブルファイバー束のデファイナブルC^{r}ファイバー束構造について (変換群を核とする代数的位相幾何学)

AUTHOR(S):
川上, 智博

数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 1-8

デファイナブルファイバー束のデファイナブル C^r ファイバー束構造について

川上智博
和歌山大学教育学部数学教室

1 序文

ここでは、実閉体 R の通常の構造 $(R,+,\cdot,<)$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{N} = (R,+,\cdot,<,...)$ において、デファイナブルファイバー束のデファイナブル C^r ファイバー束構造について考察する。順序極小構造は、実数体 $\mathbb{R}$ の順序極小拡張構造 $\mathcal{M} = (\mathbb{R},+,\cdot,<,\dots)$ に限っても、[9] により、非可算無限個存在することが知られている。

デファイナブル集合・デファイナブル写像に関して、[2], [3] などに性質がまとめられている。また、[10] では、実数体 $\mathbb{R}$ の場合において、順序極小構造より一般化された形でまとめられている。

ここでは、デファイナブル写像は連続とし、特に断らなければ、すべて $\mathcal{N} = (R,+,\cdot,<,...)$ で考えるものとする。

2 準備

R を実閉体とする。

構造 $\mathcal{N} = (R,(f_i),(L_j),(c_k))$ とは、以下のデータで定義されるものである。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 03C64.
Key Words and Phrases. 順序極小構造, 実閉体, デファイナブルファイバー束, デファイナブル C^r ファイバー束, デファイナブリーコンパクトデファイナブル群, デファイナブリーコンパクトデファイナブル C^r 群.

1. 集合 R を $\mathcal{N}$ の underlying set または universe という。

2. 関数の集合 $\{f_i|i \in I\}$、ただし $f_i : R^{n_i} \to R, n_i \geq 1$。

3. 関係の集合 $\{L_j|j \in J\}$、ただし $L_j \subset R^{m_j}, m_j \geq 1$。

4. 特別な元の集合 $\{c_k|k \in K\} \subset R$。各 c_k を定数という。

添字集合 I, J, K は、空集合でもかまわない。

f (L) が m 変数関数 (m 変数関係) とは、$f : R^m \to R$ $(L \subset R^m)$ となることである。

項とは、以下の 3 つの規則にしたがって得られる有限列のことである。

1. 定数は項である。

2. 変数は項である。

3. f が m 変数関数かつ $t_1, \ldots, t_m$ が項ならば、$f(t_1, \ldots, t_m)$ は項である。

論理式とは、変数、関数、関係、論理記号、括弧、コンマ、$\exists, \forall$ からなる有限列で、以下の 3 つの規則にしたがって得られるものである。

1. 任意の二つの項 t_1, t_2 に対して、$t_1 = t_2$ と $t_1 < t_2$ は論理式である。

2. L が m 変数関係かつ $t_1, \ldots, t_m$ が項ならば、$L(t_1, \ldots, t_m)$ は論理式である。

3. ϕ と ψ が論理式ならば、$\neg\phi$, $\phi \vee \psi$ と $\phi \wedge \psi$ は論理式である。ϕ が論理式かつ v が変数ならば、$(\exists v)\phi$ と $(\forall v)\phi$ は論理式である。

R^n の部分集合 X が $\mathcal{N}$ においてデファイナブルとは、論理式 $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ と $b_1, \ldots, b_m \in R$ が存在して、$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in R^n | \phi(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ が $\mathcal{N}$ で成り立つ $\}$ となることである。このとき、 X をデファイナブル集合という。

$\mathcal{N} = (R, +, \cdot, <, \cdots)$ が順序極小構造 (o-minimal structure) とは、R の任意のデファイナブル集合が点と開区間の有限和となることである。ここで、開区間とは、$(a,b)_R = \{x \in R | a < x < b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ を表すものとする。

実閉体 $(R, +, \cdot, <)$ は、順序極小構造であり、デファイナブル集合全体は、semialgebraic 集合全体に一致する。

R の位相は、開区間を開基とする位相とする。R^n の位相は、積位相とする。このとき、R^n はハウスドルフ空間となる。

実数係数 Puiseux 級数 $\mathbb{R}[X]^\wedge$、すなわち、$\sum_{i=k}^{\infty} a_i X^{\frac{i}{q}}, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ と表されるもの全体は、実閉体となり、非アスキメデス的である。

実数体 $\mathbb{R}$、$\mathbb{R}_{alg} = \{x \in \mathbb{R} | x$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である $\}$ は、アルキメデス的である。

以下の事実が知られている。

定理 2.1. *(1)* 実閉体の標数は 0 である。

(2) 可算以上の任意の濃度 κ に対して、2^κ 個の同型でない実閉体で濃度 κ のものが存在する。

定義 2.2. $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : X \to Y$ がデファイナブル写像とは、f のグラフ $(\subset R^n \times R^m)$ がデファイナブル集合となることである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリーコンパクトとは、任意のデファイナブル写像 $f : (a,b)_R \to X$ に対して、極限点 $\lim_{x \to a+0} f(x), \lim_{x \to b-0} f(x)$ が X 内に存在することである。

デファイナブル集合 $X \subset R^n$ がデファイナブリー連結とは、X の二つの空でないデファイナブル開集合 Y, Z で、$X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$ となるものが存在しないことである。

コンパクトデファイナブル集合は、デファイナブリーコンパクト集合であるが、デファイナブリーコンパクト集合は、コンパクト集合とは限らない。連結デファイナブル集合は、デファイナブリー連結集合であるが、デファイナブリー連結集合は、連結集合とは限らない。たとえば、$R = \mathbb{R}_{alg}$ ならば、$[0,1]_{\mathbb{R}_{alg}} = \{x \in \mathbb{R}_{alg} | 0 \leq x \leq 1\}$ は、デファイナブリーコンパクトかつデファイナブリー連結であるが、コンパクトでも連結でもない。

定理 2.3 ([8])**.** R^n のデファイナブル集合 X に対して、X がデファイナブリーコンパクト集合であることと有界閉集合であることは同値である。

コンパクト集合、連結集合の連続写像のよる像が、それぞれ、コンパクト集合、連結集合となることのデファイナブル版が以下である。

命題 2.4. $X \subset R^n$、$Y \subset R^m$ をデファイナブル集合、$f : X \to Y$ をデファイナブル写像とする。X がデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* ならば、$f(X)$ はデファイナブリーコンパクト *(*デファイナブリー連結*)* である。

例 2.5. *(1)* $\mathcal{N} = (\mathbb{R}_{alg}, +, \cdot, <)$ とする。$f : \mathbb{R}_{alg} \to \mathbb{R}_{alg}, f(x) = 2^x$ は定義されない *([11])*。

(2) $\mathcal{N} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ とする。$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。また、正弦関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \sin x$ は定義されるが、デファイナブル関数でない。

3 結果

$G \subset R^n$ がデファイナブル群とは、G が群であって、デファイナブル集合であり、群演算 $G \times G \to G, G \to G$ がデファイナブル写像となることである。$G \subset GL(n, R)$ とならないデファイナブル群が存在することが知られている。

G をデファイナブル群とする。デファイナブル G 集合とは、デファイナブル集合 X と G 作用 $\phi : G \times X \to X$ からなる組 (X, ϕ) であって、ϕ がデファイナブル写像となるものである。ここでは、(X, ϕ) と書く代わりに X と書く。

$X \subset R^n, Z \subset R^m$ をデファイナブル集合とし、$f : X \to Z$ をデファイナブル写像とする。f がデファイナブル同相写像とは、デファイナブル写像 $h : Z \to X$ が存在して、$f \circ h = id_Z$ かつ $h \circ f = id_X$ となることである。

X, Z をデファイナブル G 集合とする。デファイナブル写像 $f : X \to Z$ がデファイナブル G 写像とは、f が G 写像となることである。デファイナブル G 写像 $f : X \to Z$ がデファイナブル G 同相写像とは、デファイナブル G 写像 $h : Z \to X$ が存在して、$f \circ h = id_Z$ かつ $h \circ f = id_X$ となることである。

デファイナブル空間とは、有限個のデファイナブル集合をデファイナブル開集合に沿って貼りあわせて得られるものである。デファイナブル空間の間のデファイナブル写像も同様に定義できる。([2] の１０章)。デファイナブル空間は、[1] の意味のセミアルジェブリック空間の一般化である。

デファイナブルファイバー束の定義を思い出そう [7]。

定義 3.1. (1) ファイバ束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ が X 上のデファイナブルファイバー束でファイバーが F、構造群が K とは、次の二つの条件を満たすことである。

(a) 全空間 E がデファナブル空間、底空間 X がデファイナブル集合、構造群 K がデファイナブル群、ファイバー F が効果的デファイナブル K 作用をもったデファイナブル集合で、射影 $p : E \to X$ がデファイナブル写像である。

(b) η の有限個の局所自明化 $\{U_i, \phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_i$ が存在して、各 U_i が X のデファイナブル開集合、$\{U_i\}_i$ が X の有限開被覆である。各 $x \in U_i$ に対して、$\phi_{i,x} : p^{-1}(x) \to F$ を $\phi_{i,x}(z) = \pi_i \circ \phi_i(z)$ とする。ただし、π_i は射影 $U_i \times F \to F$ とする。$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ となる各 i, j に対して、変換関数 $\theta_{ij} := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}^{-1} : U_i \cap U_j \to K$ がデファイナブル写像である。この局所自明化をデファイナブルという。

両立するデファイナブル局所自明化をもつデファイナブルファイバー束を同一視する。

(2) $\eta = (E, p, X, F, K)$ と $\zeta = (E', p', X', F, K)$ をデフィナブルファイバー束とし、そのデファイナブル局所自明化を $\{U_i, \phi_i\}_i$ と $\{V_j, \psi_j\}_j$ とする。デファイナブル写像 $f : E \to E'$ がデファイナブルファイバー束写像とは、次の二つの条件を満たすことである。

(a) f はデファイナブル写像をカバーする、つまり、デファイナブル写像 $\underline{f} : X \to X'$ が存在して $\underline{f} \circ p = p' \circ f$ である。

(b) $U_i \cap \underline{f}^{-1}(V_j) \neq \emptyset$ となる各 i, j に対して、各 $x \in U_i \cap \underline{f}^{-1}(V_j)$ に対して、写像 $f_{ij}(x) := \psi_{j,\underline{f}(x)} \circ f \circ \phi_{i,x}^{-1} : F \to F$ が K の元による作用であり、$f_{ij} : U_i \cap \underline{f}^{-1}(V_j) \to K$ がデファイナブル写像である。

全単射デファイナブルファァーバー束写像 $f : E \to E'$ がデファイナブルファイバー束同値写像とは、f がデファイナブル写像 $\underline{f} : X \to X'$ をカバーし、$(f)^{-1} : E' \to E$ が $\underline{f}^{-1} : X' \to X$ をカバーするデファイナブルファイバ束写像である。デファイナブルファイバー束同値写像 $f : E \to E'$ がデファイナブルファイバー束同型写像とは、$X = X'$ かつ $\underline{f} = id_X$ となることである。

(3) デファイナブルファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ の連続切断 $s : X \to E$ がデフィナブル切断とは、各 i に対して、$\phi_i \circ s|U_i : U_i \to U_i \times F$ がデファイナブル写像なることである。

(4) デファイナブルファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ が主デファイナブルファイバー束とは、$F = K$ かつ F の K 作用が K の積になることである。このとき、 (E, p, X, F, K) と書く代わりに、(E, p, X, K) と書く。

定義 3.2. r を $1 \leqq r \leqq \infty$ とする。

(1) デファイナブルファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ がデファイナブル C^r ファイバー束とは、全空間 E と底空間 X がデファイナブル C^r 多様体で、構造群 K がデファイナブル C^r 群、ファイバー F が効果的作用をもったデファイナブル $C^r K$ 多様体、射影 $p : E \to X$ がデファイナブル C^r 写像で、すべての変換関数がデファイナブル C^r 写像となることである。主デファイナブル C^r ファイバー束も同様に定義される。

(2) デファイナブル C^r ファイバー束写像、デファイナブル C^r ファイバー束同値写像、デファイナブル C^r ファイバー束同型写像、デファイナブル C^r 切断も同様に定義される。

定理 3.3 (デファイナブル商空間の存在 ([2])). G をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群、X をデファイナブル G 集合とする。このとき、X/G はデファイナブル集合として存在して、射影 $\pi : X \to X/G$ は、全射デファイナブリー固有デファイナブル写像である。

命題 3.4. (E, p, X, K) を主デファイナブルファイバー束、F を効果的デファイナブル K 作用をもったデファイナブル集合、K をデファイナブリーコンパクトデファイナブル群とする。このとき、$(E \times_K F, p', X, F, K)$ はデファイナブルファイバー束である。ただし、$p' : E \times_K F \to X$ を $p'([z, f]) = p(z)$ で定義される射影とする。

命題 3.5. (E, p, X, K) を主デファイナブル C^r ファイバー束、F を効果的デファイナブル $C^r K$ 作用をもったデファイナブル集合、K をデファイナブリーコンパクトデファイナブル C^r 群とする。このとき、$(E \times_K F, p', X, F, K)$ はデファイナブル C^r ファイバー束である。ただし、$p' : E \times_K F \to X$ を $p'([z, f]) = p(z)$ で定義される射影とする。

命題 3.6. $\mathcal{B}_K = (B_K, p_K, X_K)$ を K の n-普遍主ファイバー束、F を効果的デファイナブル $C^r K$ 作用をもったアフィンデファイナブル C^r 多様体とする。このとき、同伴束 $\mathcal{B}_K[F] := (E, p, X_K, F, K)$ はデファイナブル C^r ファイバー束である。

定理 3.7 ([4]). $X \subset R^n, Y \subset R^m$ をデファイナブル C^r 多様体とし、$0 \leqq s < r < \infty$ とする。このとき、任意のデファイナブル C^s 写像 $f : X \to Y$ はデファイナブル C^s 位相において、デファイナブル C^r 写像 $h : X \to Y$ で近似できる。

定義 3.8. *(1)* デファイナブルファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ が強デファイナブルとは、n-普遍束 $\mathcal{B}_K$ とデファイナブル写像 $f : X \to X_K$ が存在して、$f^*(\mathcal{B}_K[F])$ と η がデファイナブルファイバ束同型となることである。

(2) デファイナブル C^r ファイバー束 $\eta = (E, p, X, F, K)$ が強デファイナブルとは、n-普遍束 $\mathcal{B}_K$ とデファイナブル C^r 写像 $f : X \to X_K$ が存在して、$f^*(\mathcal{B}_K[F])$ と η がデファイナブル C^r ファイバ束同型となることである。

以下の結果を得た。

定理 3.9 ([6])**.** $\eta = (E, p, X, F, K)$ をアフィンデファイナブル C^r 多様体上の強デファイナブルファイバー束とし、K をアフィンデフィナブリーコンパクトデフィナブル C^r 群とする。

(1) X 上の強デファイナブル C^r ファイバー束 ζ が存在して、ζ と η はデファイナブルファイバー束同型である。

(2) ζ' を X 上の別の強デファイナブル C^r ファイバー束で、ζ' と η はデファイナブルファイバー束同型とすると、ζ' と ζ はデファイナブル C^r ファイバー束同型である。

特に、*(1)* と *(2)* より、η はデフィナブル C^r ファイバー束同型を除いてただ一つのデファイナブル C^r ファイバー束構造をもつ。

R が実数体のとき、定理 3.9 は [5] で証明されている。

References

[1] H. Delfs and M. Knebusch, *Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semialgebraic spaces*, Math. Z. **178** (1981), 175–213.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[4] J. Escribano, *Approximation theorems in o-minimal structures*, Illinois J. Math. 46 (2002), 111–128.

[5] T. Kawakami, *Definable C^r fiber bundles and definable C^rG vector bundles*, Commun. Korean Math. Soc. **23** (2008), 257–268.

[6] T. Kawakami, *Definable C^r fiber bundle structures of a definable fiber bundle*, preprint.

[7] T. Kawakami, *Homotopy property for definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1-6.

[8] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. **59** (1999), 769–786.

[9] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.

[10] M. Shiota, *Geometry of subanalyitc and semialgebraic sets*, Progress in Math. **150** (1997), Birkhäuser.

[11] R. Wencel, *Weakly o-minimal expansions of ordered fields of finite transcendence degree*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 109–116.